

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA  
ESCOLA POLITÉCNICA  
MEAU- MESTRADO EM ENGENHARIA  
AMBIENTAL URBANA  
ENG C 18 Métodos de Pesquisa  
Quantitativos e Qualitativos

# AULA 7 – DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS E MODELO NORMAL

Docente: Cira Souza Pitombo



# INTRODUÇÃO

- Modelo de probabilidades mais conhecido:  
**Distribuição normal de probabilidade**
- O que é uma variável aleatória contínua?
  - **Altura de um indivíduo**
  - **Não é possível enumerar todos os valores possíveis, mas podemos dizer, que o resultado será um número real do intervalo de zero a dois metros e meio**



# DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

- Não existe interesse em atribuir probabilidades a cada particular valor, mas sim, para eventos formados por intervalos de valores
- Ao observar a altura de um indivíduo, não importa a probabilidade de ele medir 1,682333 metros
- **Probabilidade de ter altura no intervalo de 1,60m a 1,80m ou acima de 1,90m**



# DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

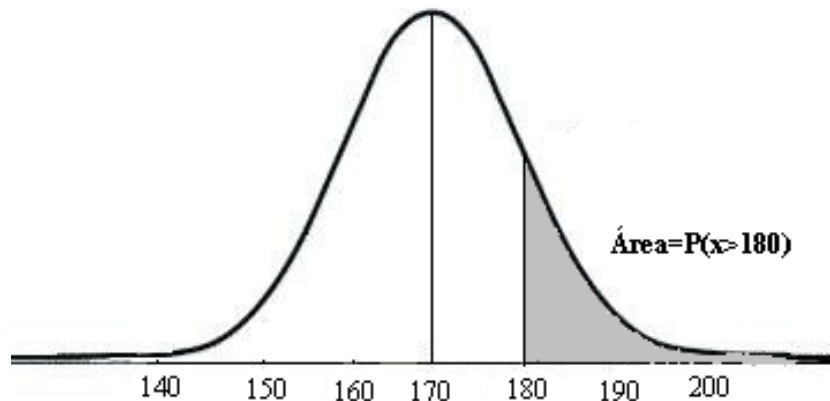
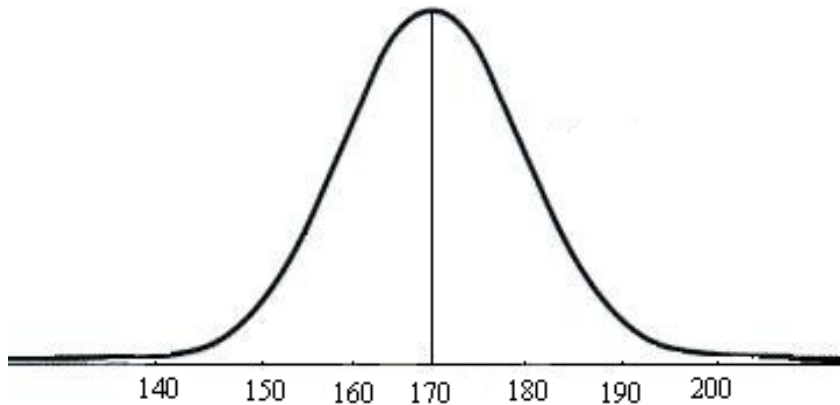
- A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória contínua pode ser representada por uma função não negativa, com área entre o eixo-x e a curva igual a 1(um).

- Os eventos podem ser representados por intervalos no eixo-X, enquanto as probabilidades, pelas correspondentes áreas sob a curva



# DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

- Seleccionando, aleatoriamente, em uma certa universidade, um estudante do sexo masculino. Seja  $X$  o valor de sua altura, em centímetros.

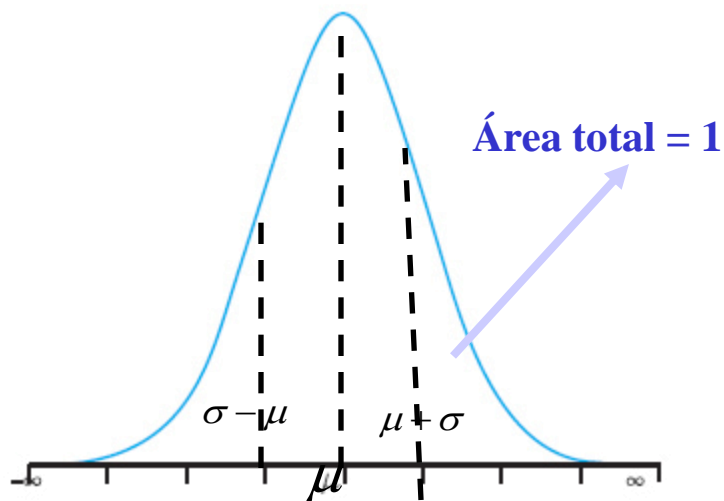


# DISTRIBUIÇÕES NORMAIS

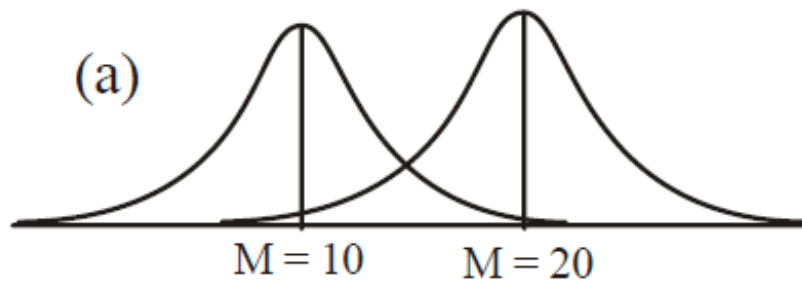
- A distribuição normal é caracterizada por uma função, cujo gráfico descreve uma curva em forma de sino. Esta distribuição depende de dois parâmetros, a saber:

$\mu$  Média ou valor esperado: especifica a posição central da distribuição de probabilidades

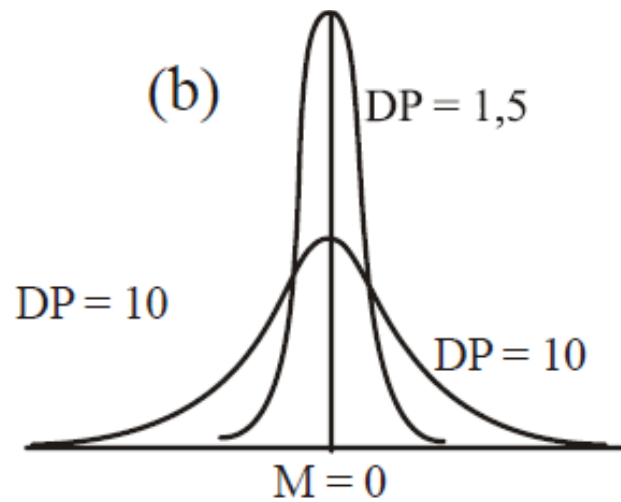
$\sigma$  Desvio padrão: especifica a variabilidade da distribuição de probabilidades



# DISTRIBUIÇÕES NORMAIS



(a) Altura das crianças na primeira e quarta série



(b) Altura das crianças na terceira série e alturas de estudantes da primeira à quinta série



# DISTRIBUIÇÕES NORMAIS

- No exemplo a seguir, um instituto de pesquisas realiza uma amostragem com 5000 pessoas para obter uma estimativa da altura média do brasileiro adulto. Estas pessoas são sorteadas para a pesquisa através de uma estratificação adequada, que reflita os dados de toda a população do país. Observe os resultados, categorizados por faixas de altura:

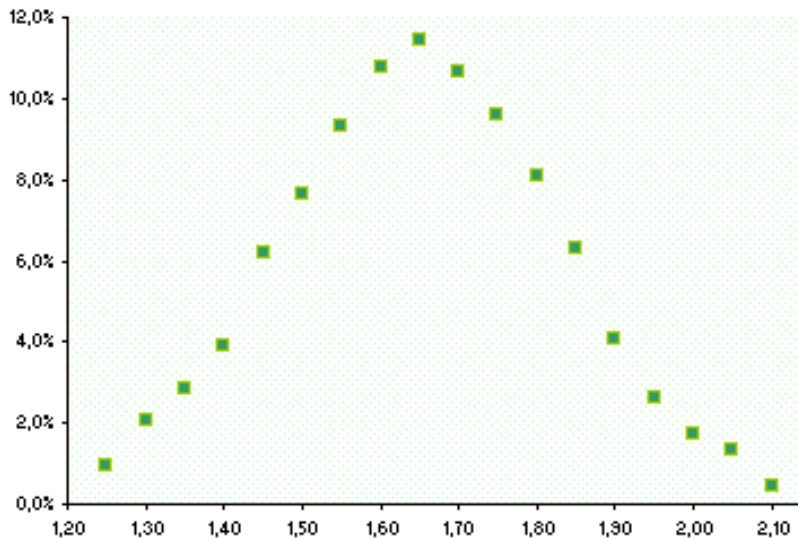
	D	E	F	G	H	I
	Intervalo		Valores observados			
	Mínimo	Máximo	Absoluto	Porcentagem		
2						
3						
4						
5		-	1,30	47	0,9%	
6		1,30	1,35	102	2,0%	
7		1,35	1,40	142	2,8%	
8		1,40	1,45	196	3,9%	
9		1,45	1,50	311	6,2%	
10		1,50	1,55	383	7,7%	
11		1,55	1,60	465	9,3%	
12		1,60	1,65	540	10,8%	
13		1,65	1,70	571	11,4%	
14		1,70	1,75	532	10,6%	
15		1,75	1,80	480	9,6%	
16		1,80	1,85	406	8,1%	
17		1,85	1,90	314	6,3%	
18		1,90	1,95	205	4,1%	
19		1,95	2,00	131	2,6%	
20		2,00	2,05	86	1,7%	
21		2,05	2,10	68	1,4%	
22		2,10	+	21	0,4%	
23				5000	100,0%	
24						





# DISTRIBUIÇÕES NORMAIS

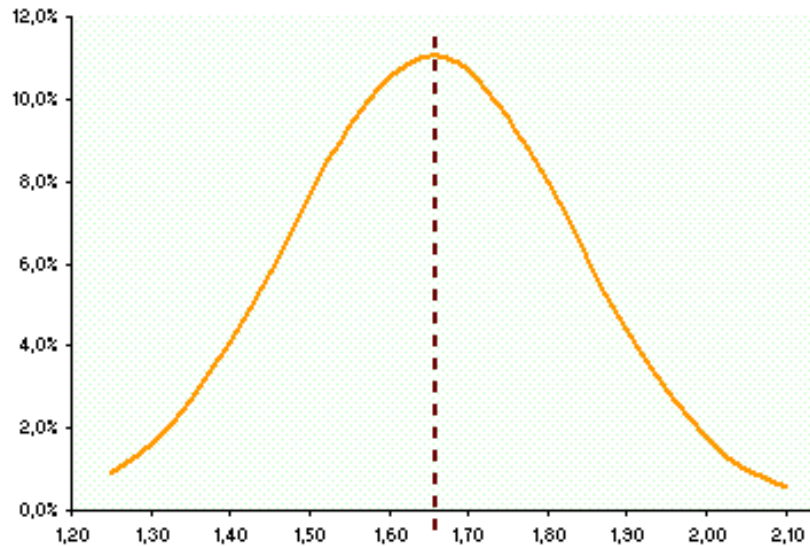
- Neste experimento, notamos que os valores registrados se adensam nas alturas centrais, crescendo até determinado ponto e depois decrescendo. Esta amostra tem, aproximadamente, as características de comportamento descritas anteriormente, de forma que uma aproximação normal pode ser uma bom modelo para a distribuição de altura do brasileiro adulto. Veja o gráfico das categorias nas quais dividimos as observações:





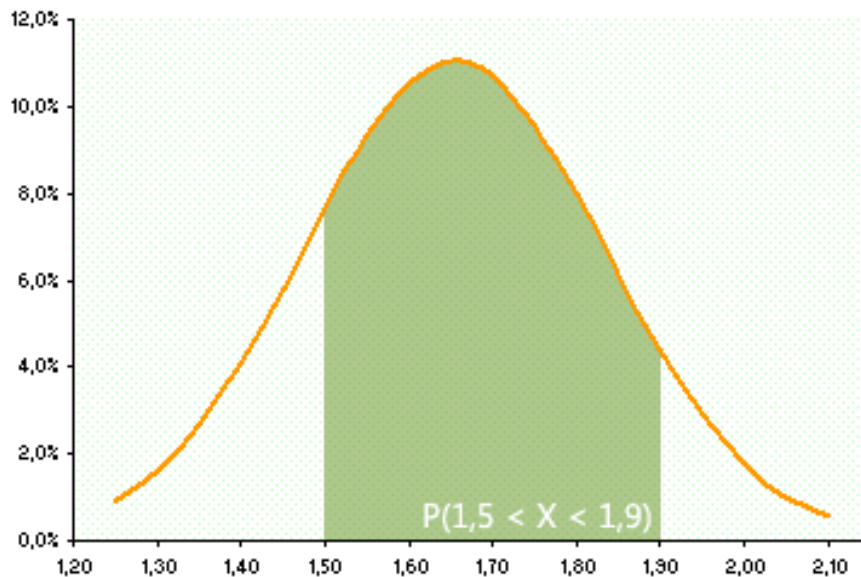
# DISTRIBUIÇÕES NORMAIS

- Observe que a curva normal definida por  $N(1,653 \text{ m}; 0,173 \text{ m})$  modela bem os valores medidos. Nesta distribuição normal, uma linha vertical cortando a média separa a distribuição em duas partes:



# DISTRIBUIÇÕES NORMAIS

- Dispondo deste modelo, podemos utilizar as funções de distribuição normal do Excel (ou, no caso de estarmos trabalhando com papel, uma tabela de distribuição normal) para obter facilmente uma série de informações sobre nossa população. Por exemplo, podemos responder qual é a porcentagem da população adulta de estatura considerada "normal", entre 1,50 m e 1,90 m. Este valor é numericamente igual à área abaixo:



# DISTRIBUIÇÕES NORMAIS: O modelo matemático

- A função de densidade da probabilidade da distribuição normal é:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2}$$

- Em termos práticos, podemos trabalhar com padronização de dados, usando apenas uma tabela.



# VALORES PADRONIZADOS

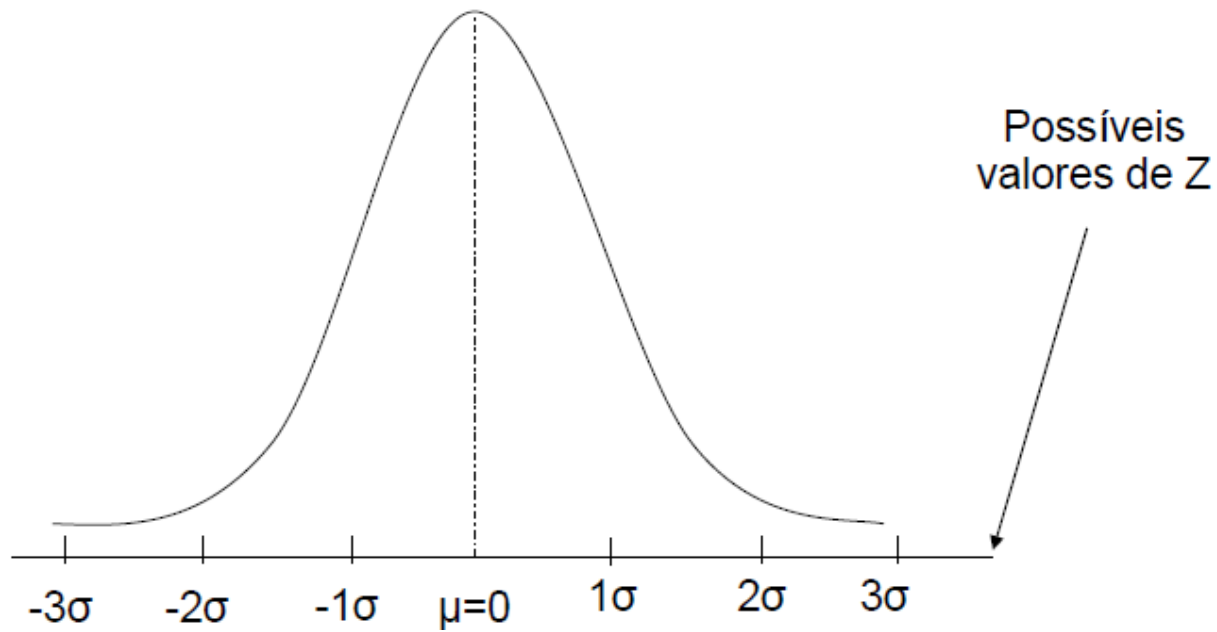
- A distribuição normal com média 0 (zero) e desvio padrão 1 (um) é conhecida como distribuição normal padrão.
- Para transformar um valor  $x$ , de uma distribuição normal com média e desvio padrão, em um valor  $z$  da distribuição normal padrão, basta fazer a seguinte operação

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

O valor  $z$  conhecido como valor padronizado, é uma medida relativa. Mede o quanto  $x$  se afasta da média, em unidade de desvio padrão



# VALORES PADRONIZADOS



# VALORES PADRONIZADOS

## EXERCÍCIO EM SALA

Suponha que as notas  $X$  de um vestibular tenham distribuição normal com média de 60 pontos e desvio padrão de 15 pontos

- Se você prestou esse vestibular e obteve nota  $x = 80$  pontos, qual é a sua posição relativa em relação à média dos vestibulandos, em unidade de desvio padrão
- Se foram considerados aprovados os candidatos que obtiveram nota mínima correspondente a 1 (um) desvio padrão acima da média, qual é a nota mínima de aprovação na escala original?

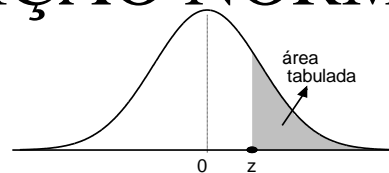
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$





# TABELA DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO

TABELA III Distribuição normal padrão.



z	segunda decimal de z									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2842	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,00135									
3,5	0,000 233									
4,0	0,000 031 7									
4,5	0,000 003 40									
5,0	0,000 000 287									



# TABELA DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO

## EXERCÍCIO EM SALA

Seja  $z$  uma variável aleatória com distribuição normal padrão, calcule:

- $P(Z > 1,65)$
- $P(z < 1,65)$

z	segunda decimal de z									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2842	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455



# TABELA DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO

## EXERCÍCIO EM SALA

Suponha que o desempenho dos alunos das três últimas fases do curso de ciências da computação da UFSC tenha distribuição normal de média 2,5 e desvio padrão de 0,6. Selecionando aleatoriamente um aluno desta população, qual a probabilidade de ele acusar desempenho entre 2 e 3,5?

z	segunda decimal de z									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2842	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455



# Aproximação Normal à Binomial

Em muitas situações práticas, a distribuição normal pode ser usada como uma aproximação razoável de outras distribuições. É o que acontece, por exemplo, em experimentos binomiais com  $n$  grande.

(1)  $n$  grande

(2)  $\pi$  não muito próximo de 0 (zero) ou de 1 (um)

$$\mu = n\pi$$

$$\sigma = \sqrt{n\pi(1-\pi)}$$

